

# H.25前期輪講

## 光学実験講座(5)

2013/5/14 長谷

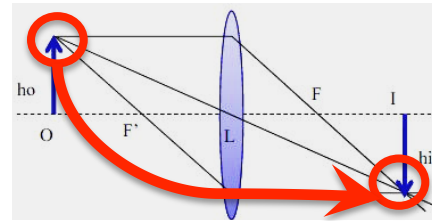
# 目次

- 0.7 アッベの結像理論
  - 0.7.1 空間周波数
  - 0.7.2 像の形成
  - 0.7.3 空間フィルタリング

# 0.7 アッベの結像理論

## ◆ 幾何光学の結像理論

- 光の波動性や量子性その他を無視し、  
光の進む線の性質のみを考える  
↓  
回折や干渉の効果は考えない



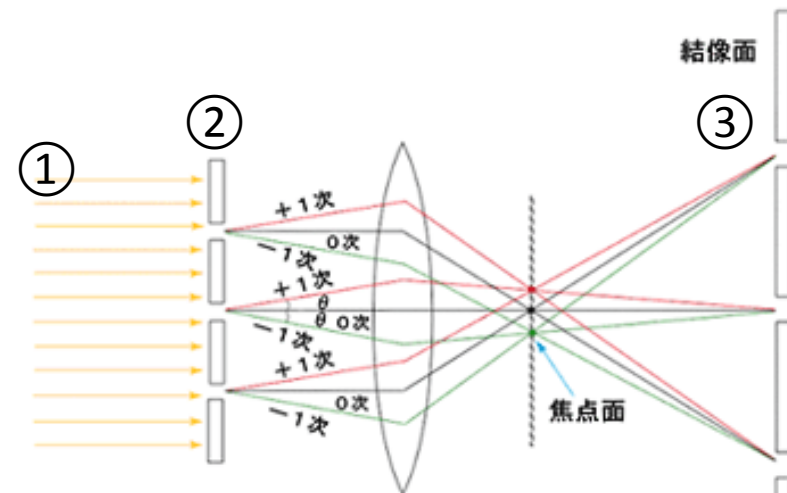
点から点

一点に収束

- 幾何光学の三法則：透過、反射、屈折（光学実験講座(1)）

## ◆ アッベの結像理論

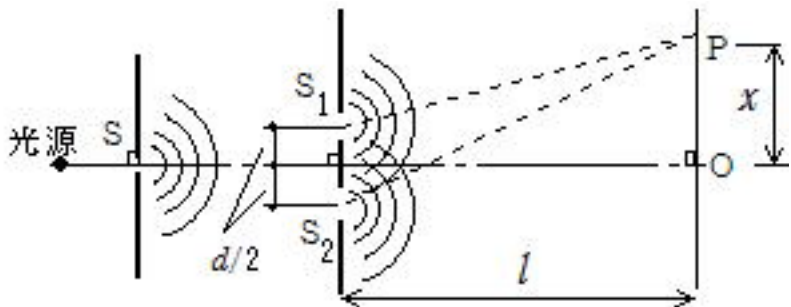
- ①物体面に照明光が入射
- ②多くの回折光が生じる
- ③像面上で干渉縞を形成



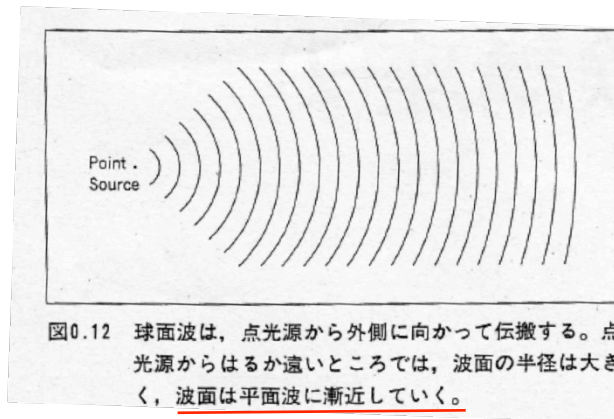
多数の干渉縞が重なり合ったもの⇒物体の像

# 0.7 アッベの結像理論 回折格子とレンズ

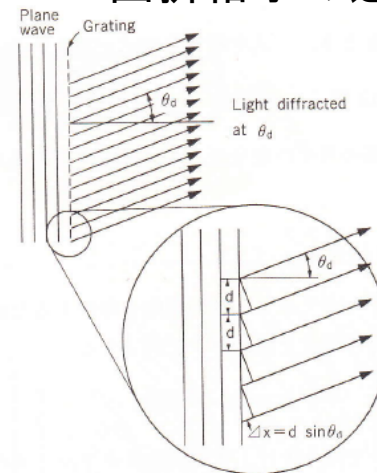
ヤングの実験



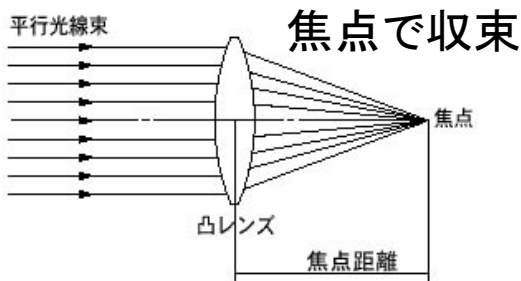
$l$  が無限大  $\rightarrow$   $m$  次の回折光が  
無限遠で収束



回折格子の近く



$m$  次の回折光は平行



焦点面

$m$  次の回折光を  
無限遠  $\rightarrow$  レンズの後方焦点  
に配置できる

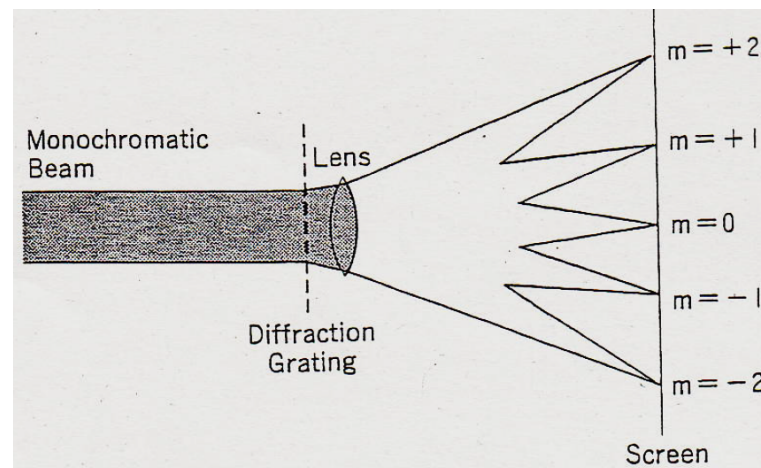
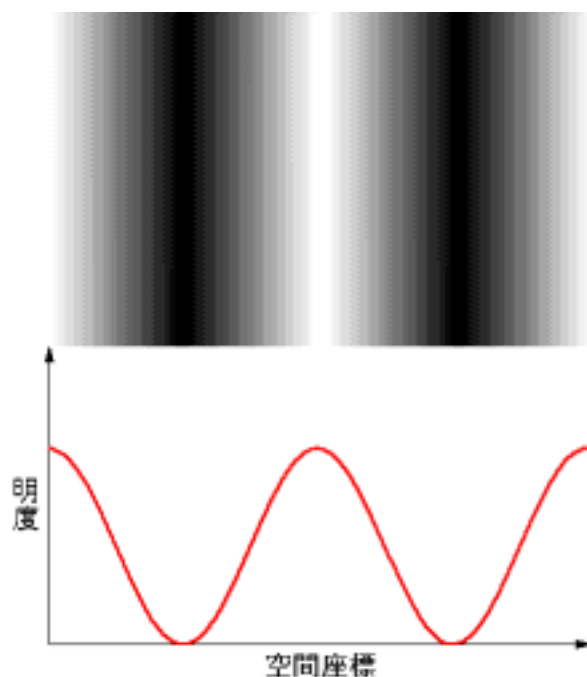


図0.38 回折の次数

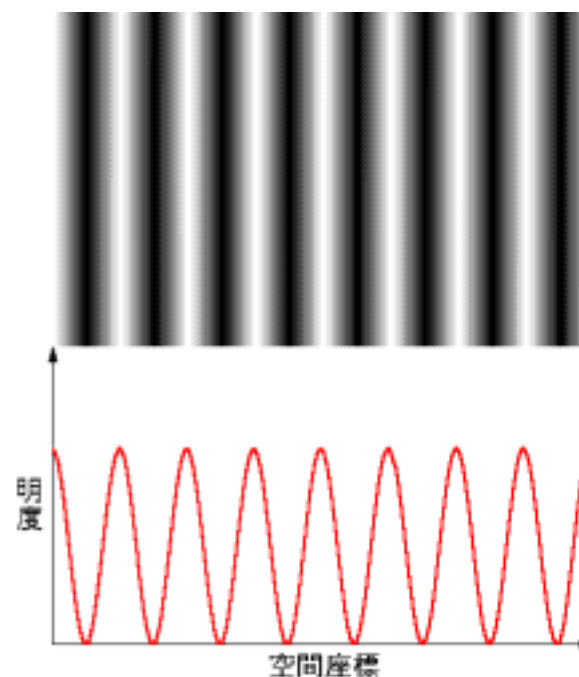
# 0.7.1 空間周波数

周波数 → 時間的变化を示す  
空間周波数 → 空間的变化を示す

空間周波数 低



空間周波数 高

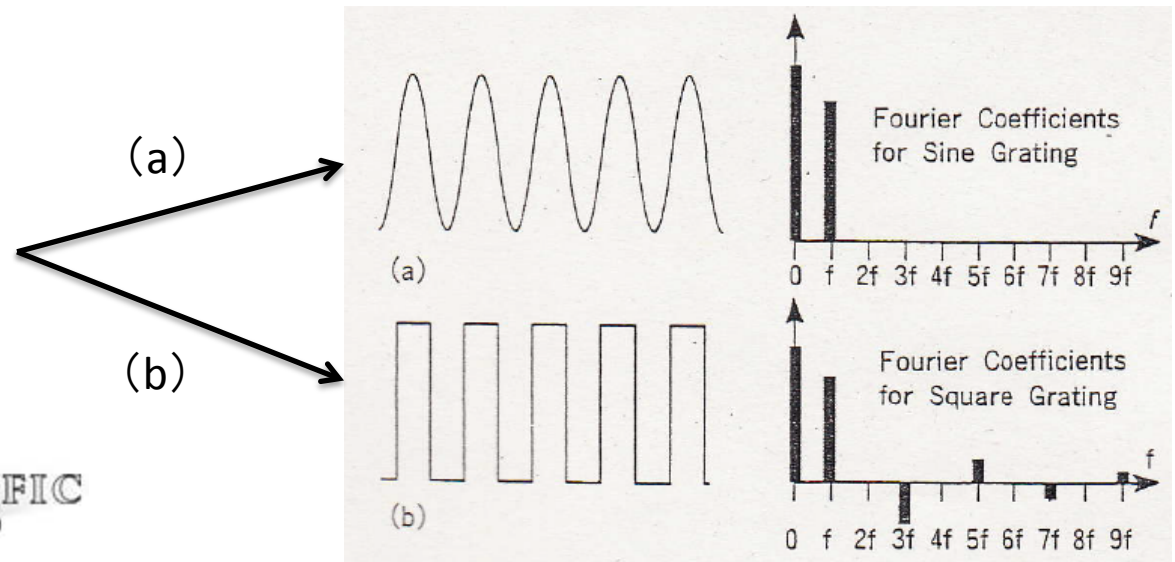


明度の変動 → 画像の周期構造の細かさを表す

音, 電気信号, 空間変化

⋯ = 基本周波数 ( $f$ ) + 高次高周波数 ( $2f, 3f, \dots$ )

## 回折格子



(a) 正弦的变化  $\rightarrow$  0次と1次 ( $m=\pm 1$ ) 成分のみ

0次の成分 = 透過光

(b) 正弦からずれる  $\rightarrow$  高次の回折光  $\rightarrow$  高周波成分

# フーリエ理論

フーリエ理論・・・すべての関数は三角関数の和で表現出来る

## フーリエ級数展開

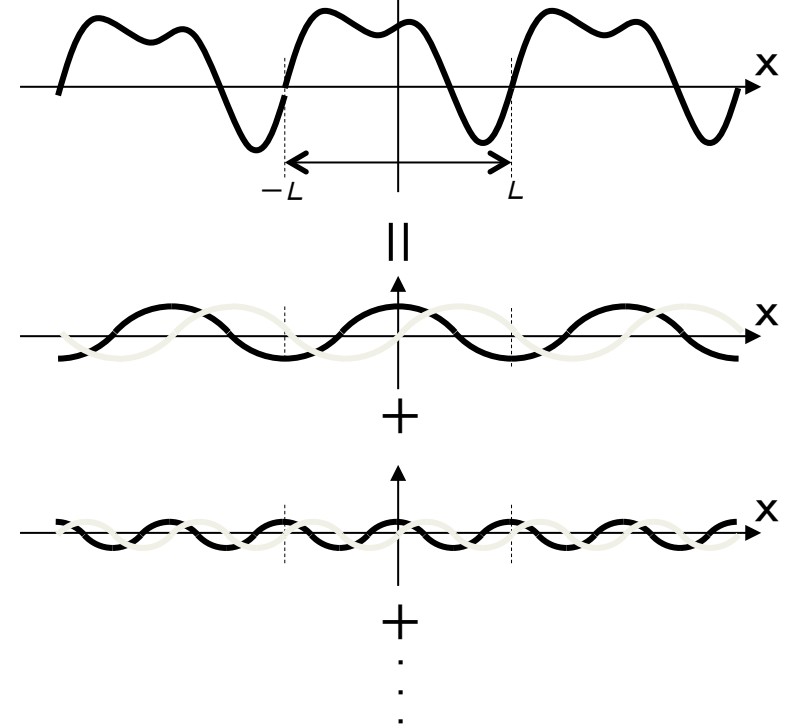
周期関数を周期の異なる余弦関数 (偶関数) と正弦関数 (奇関数) の和で表現

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{L} + \dots$$
$$+ b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases}$$

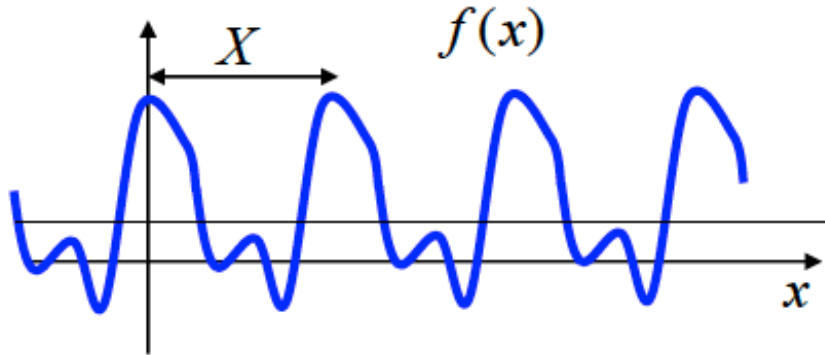
$f(-x) = f(x)$   
y軸対称

$f(x) \quad f(-x) = -f(x)$   
原点对称



[ $-L, L$ ]のパターンを繰り返す周期関数を、 $\sin(x)$ 、 $\cos(x)$ の和で表す

# フーリエ級数展開

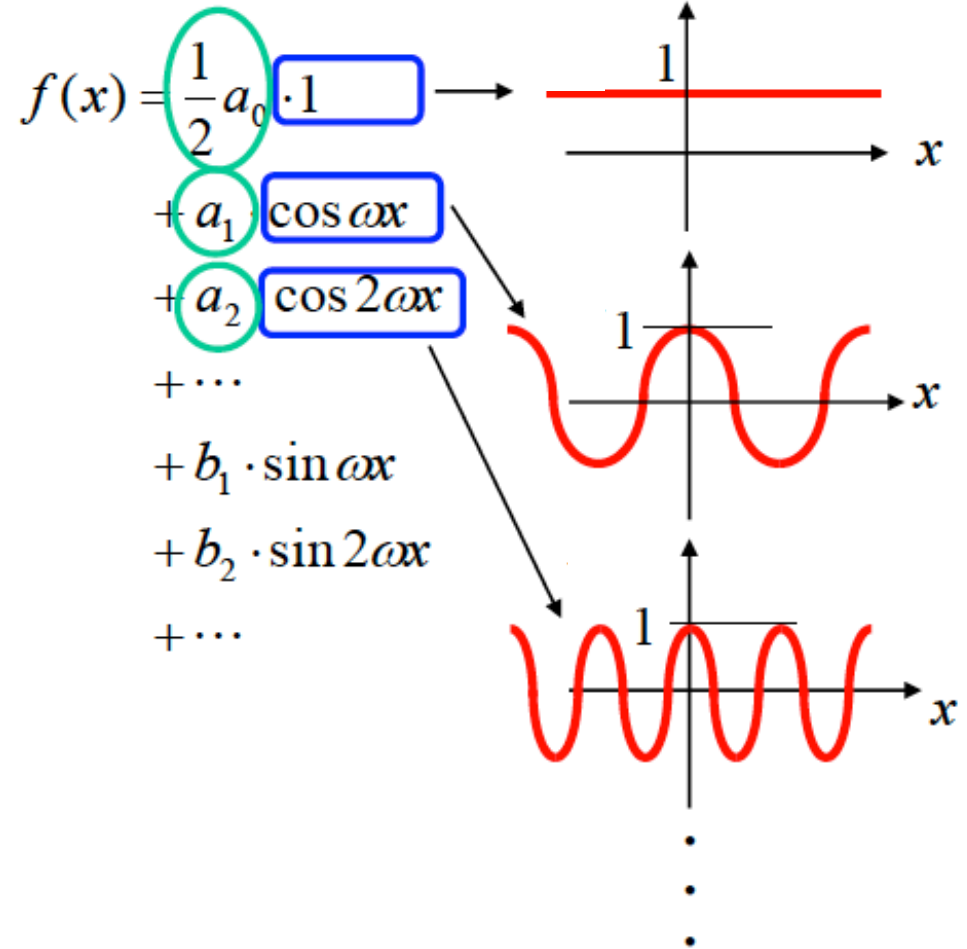


$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots$$

$$+ b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots$$

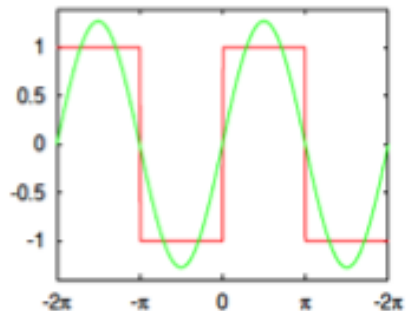
$\omega$  = 角周波数 =  $2\pi f$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases}$$

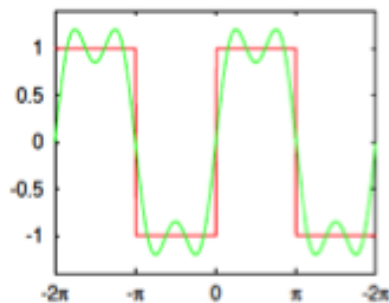




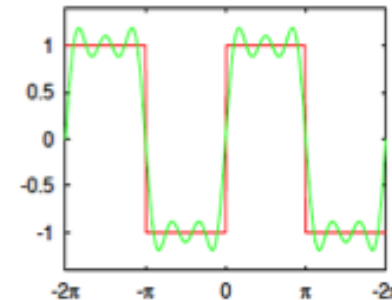
# フーリエ合成(逆フーリエ変換)



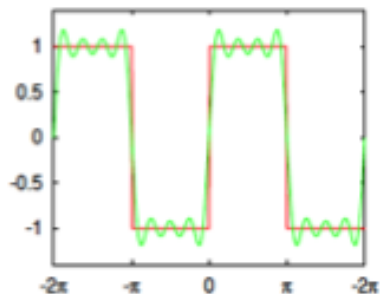
$\sin(x)$



$\sin(x) + \sin(3x)/3$

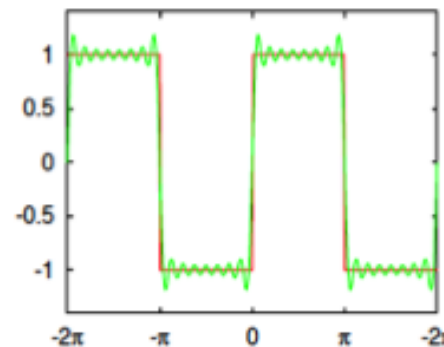


$\sin(x) + \sin(3x)/3 + \sin(5x)/5$



$\sin(x) + \sin(3x)/3 + \sin(5x)/5 + \sin(7x)/7$

■ ■ ■



$\sin(x) + \dots + \sin(15x)/15$

偶関数 = 偶関数  
奇関数 = 奇関数

でのみ表すことが出来る

# フーリエ変換

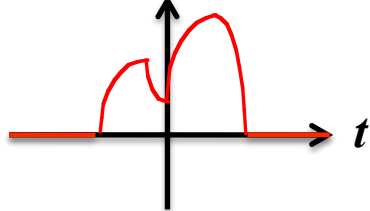
## フーリエ変換のイメージ

フーリエ級数展開 = 周期関数のみ

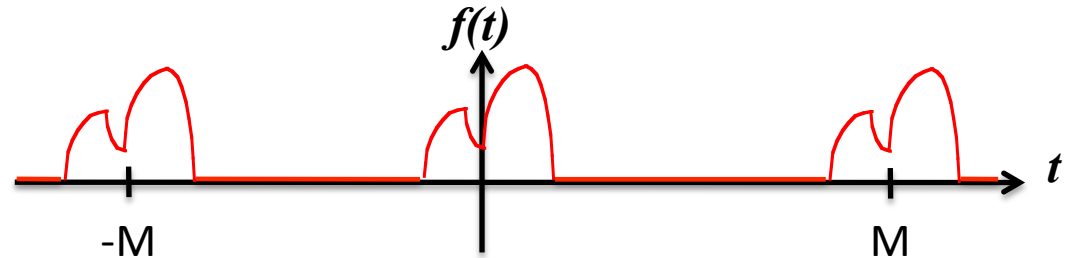
拡張

フーリエ変換 = 任意の関数

非周期関数  $f(t)$



同じ波が繰り返していると仮定する → 周期関数 (周期M)



フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

信号  $f(t)$  と三角関数  $e^{-j\omega t}$  の内積

内積 =  $a \cdot b \cos\theta$

関数同士が似ていない

内積 = 小

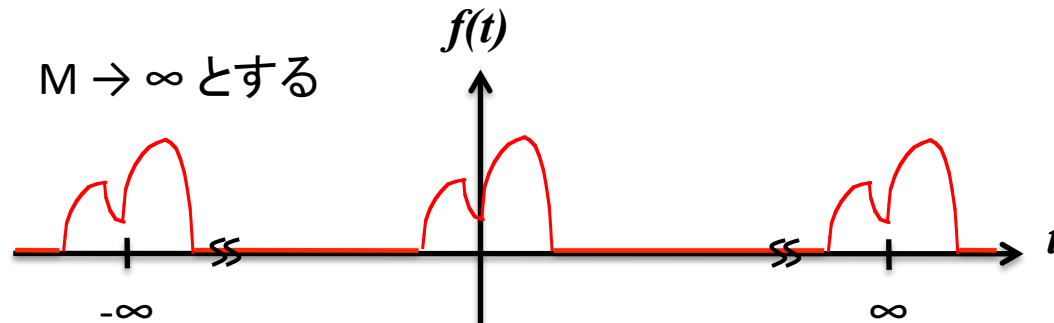
関数同士が似ている

内積 = 大

逆フーリエ変換

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$M \rightarrow \infty$  とする



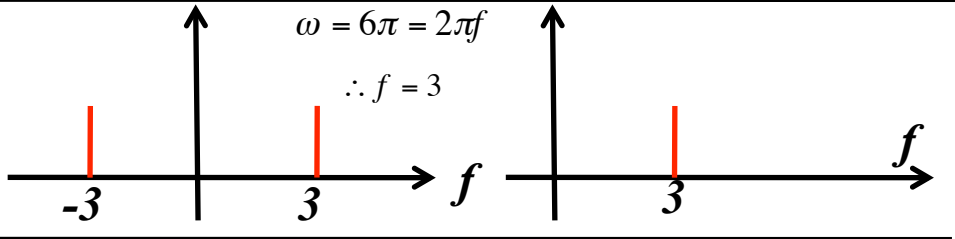
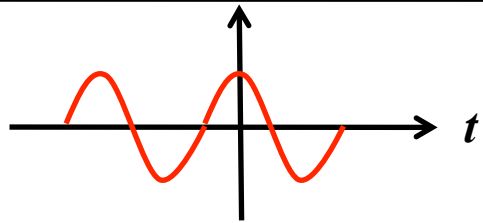
元の関数に近づく  
無限遠の項は無視

# フーリエ変換の例

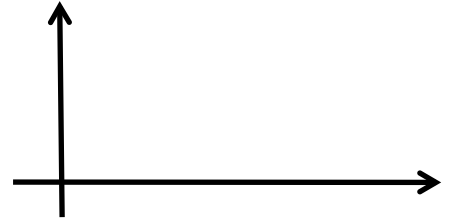
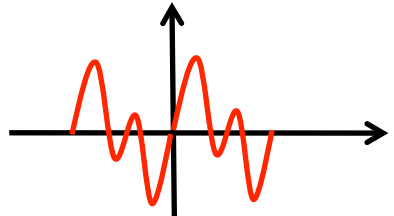
時間軸

周波数軸

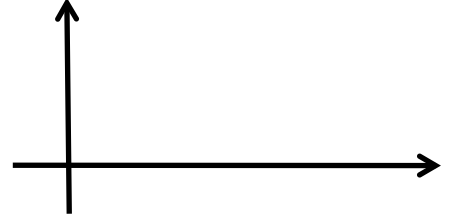
$f(t) = \cos(6\pi t)$



$f(t) = \sin(3\pi t) + \sin(6\pi t)$

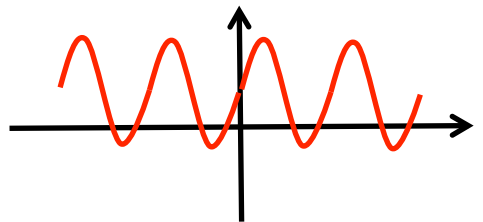


直流信号

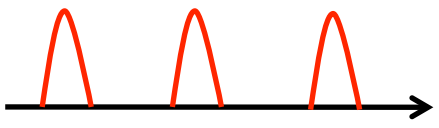


$f(t) = a + \sin(8\pi t)$

※aは定数



フェムト秒  
パルスレーザー

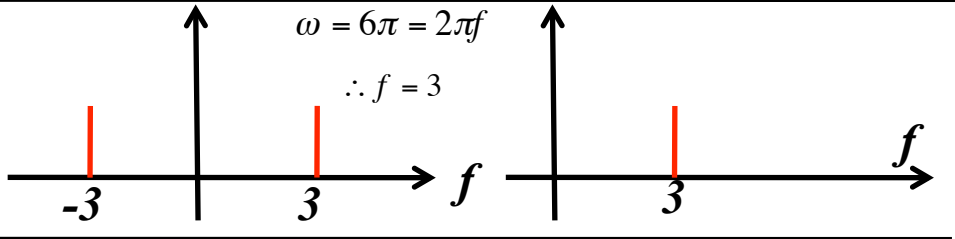
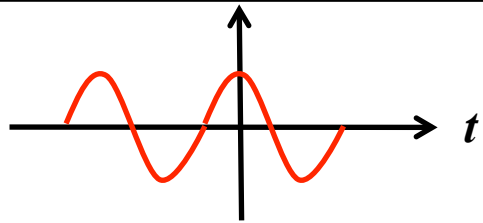


# フーリエ変換の例

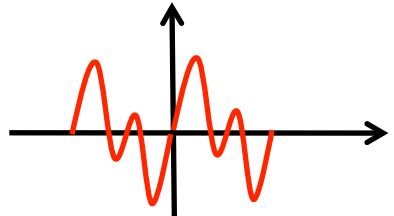
時間軸

周波数軸

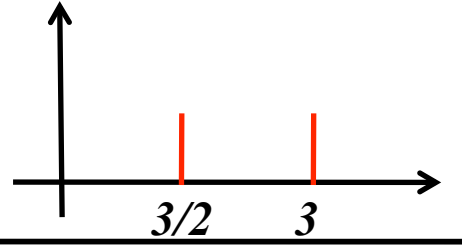
$f(t) = \cos(6\pi t)$



$f(t) = \sin(3\pi t) + \sin(6\pi t)$



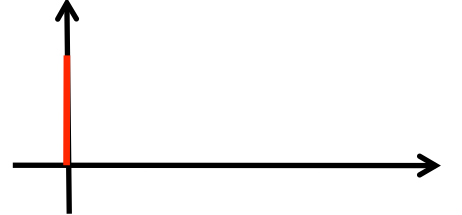
同様に



直流信号

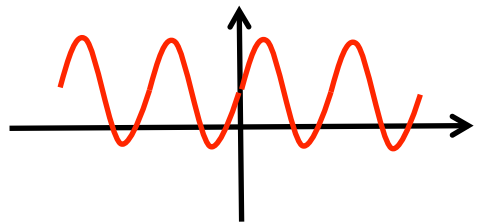


周波数0  
 デルタ関数

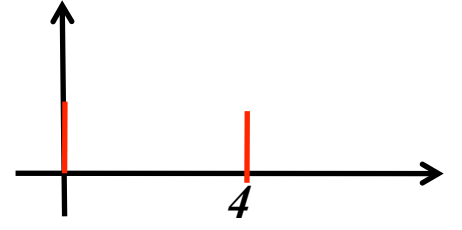


$f(t) = a + \sin(8\pi t)$

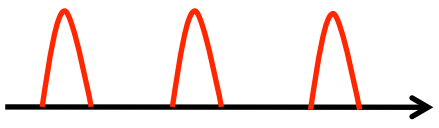
※aは定数



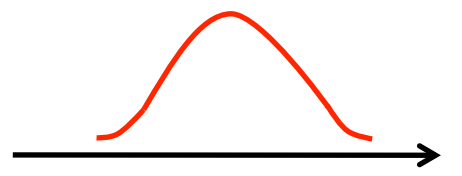
直流成分  
 +  
 sin波



フェムト秒  
 パルスレーザー



様々な波が重なり合っている  
 ↓  
 様々な周波数の成分を含む



# 0.7.2 像の形成

## レーザーとレンズ＝フーリエ変換器

### ①レーザーとレンズ

複数の回折波に分解  
各スリットからの回折波を集光

各次数の回折波→各空間周波数

大きくてなめらかな濃淡＝低空間周波数  
＝回折角小

小さくシャープな端面＝高空間周波数  
＝回折角大

回折格子の場合

$$\sin(\theta_d) = \frac{\Delta x}{d} \approx \theta_d$$

### ②フーリエ変換

波の関数を様々な波の和に分解, またその逆を行う

∴ レーザーとレンズ＝フーリエ変換器

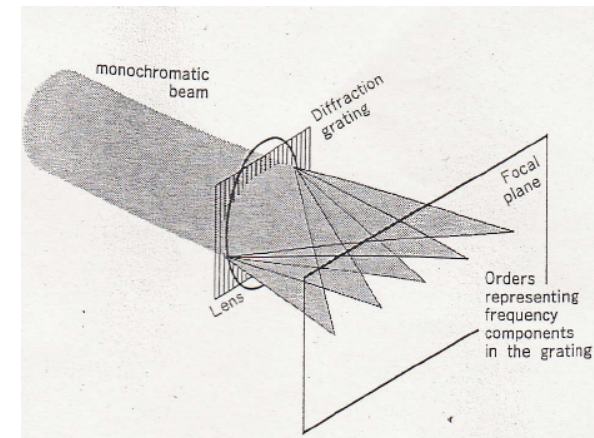


図 0.42 光学的フーリエ解析

# 回折格子～変換面(焦点面)

空間周波数のスペクトルを形成

## フーリエ変換

# 変換面(焦点面)～結像面

回折波を重ね合わせる(干渉)

## フーリエ合成

高空間周波数＝回折角大＝回折次数大  
＝軸から遠

∴集光角大＝解像度大

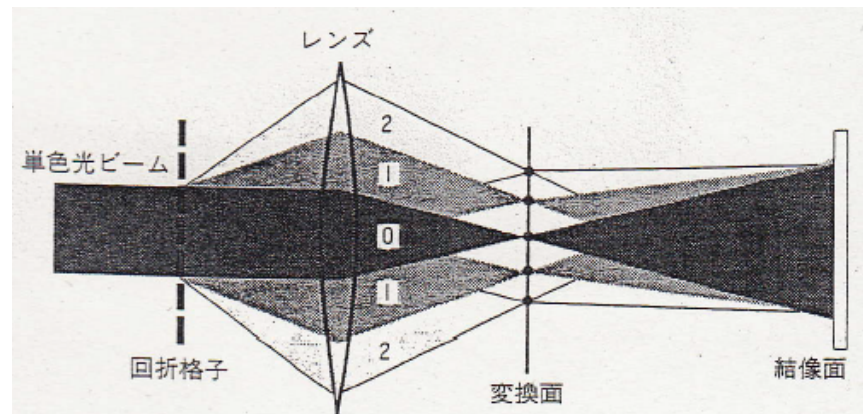
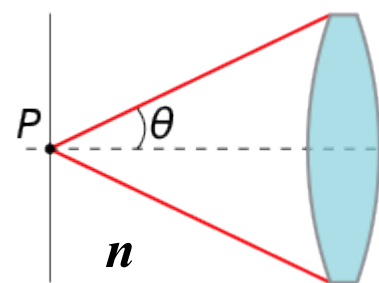


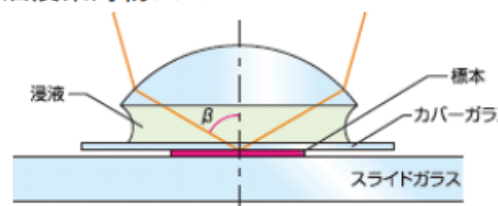
図 0.43 アッベの結像理論



$$NA = n \sin \theta$$

$$d = \frac{\lambda}{2NA}$$

油浸系対物レンズ



液浸系対物レンズの開口数

$$NA = n \sin \beta$$

実用最大: 1.49

n: 浸液の屈折率  
オイル: 1.516  
水: 1.33

# 0.7.3 空間フィルタリング

2次元フーリエ変換

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

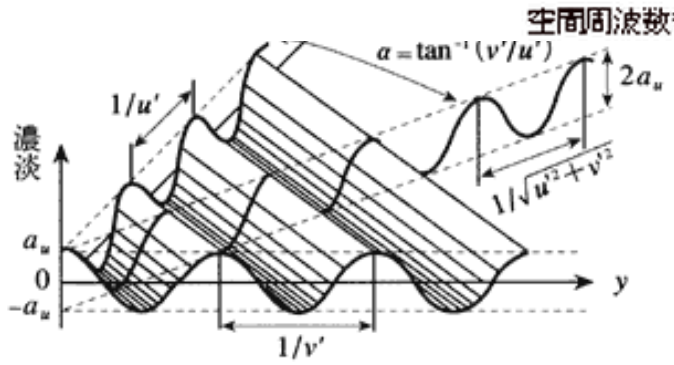
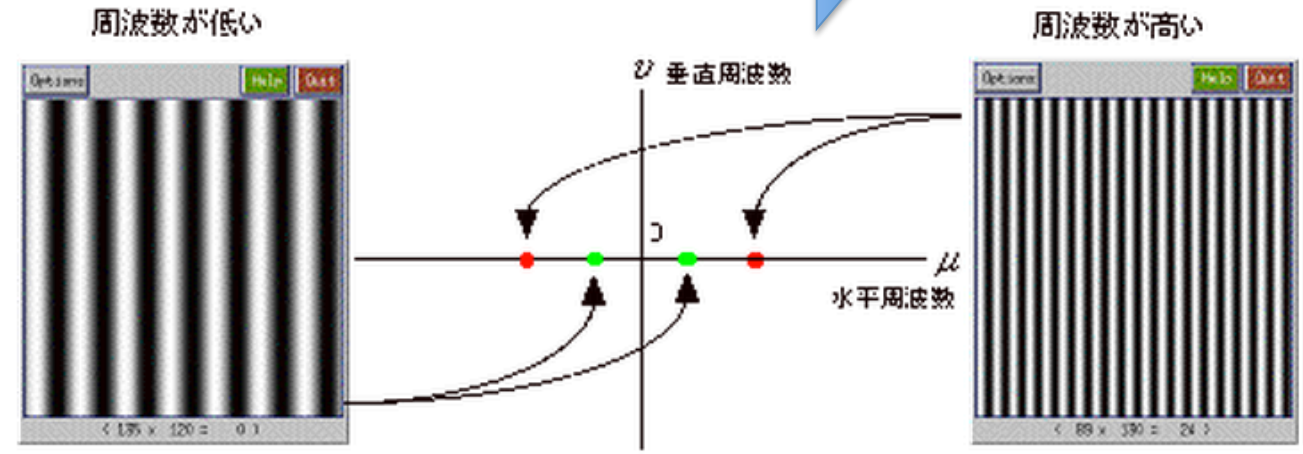
画像 = 濃淡データの集まり

画像の濃淡 → 水平方向と垂直方向が2つ存在

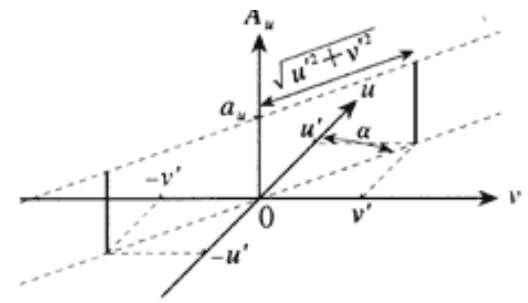


1次元フーリエ変換を

画像に対して横方向・縦方向に行う



〈a〉 正弦波状に明暗が変化するパターン

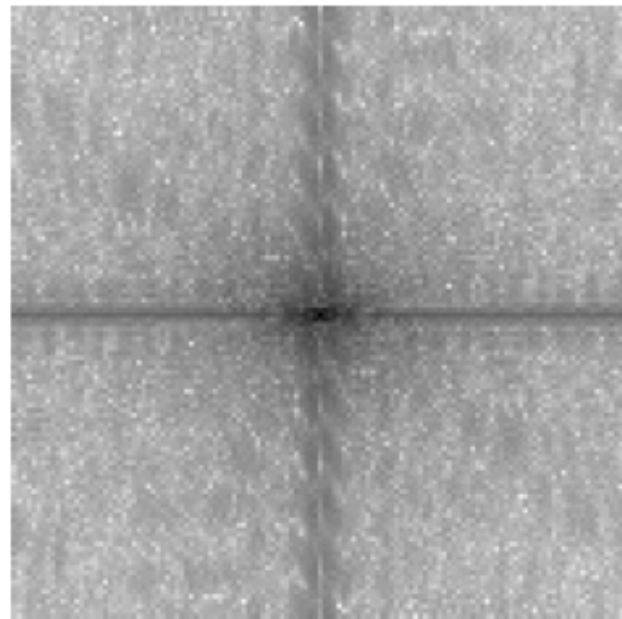


〈b〉 左図のパターンに対応する振幅スペクトル

# 空間フィルタリング



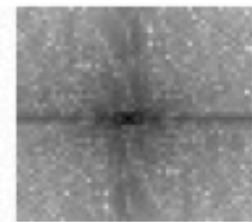
フーリエ変換



画像処理



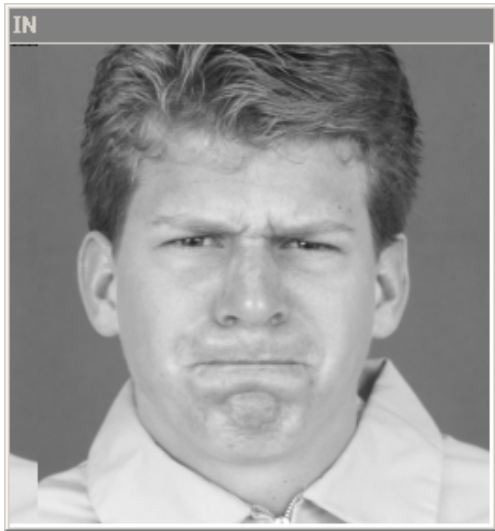
高周波成分除去



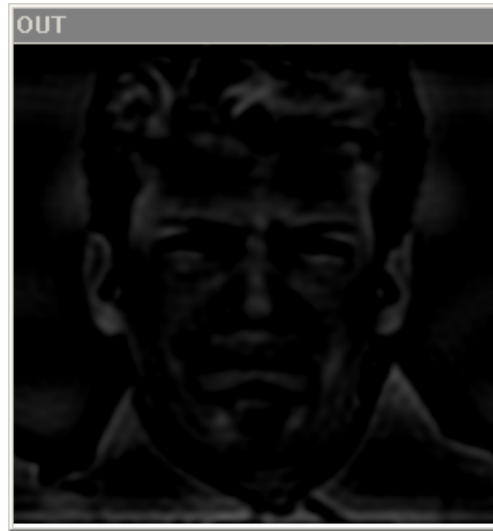
逆フーリエ変換







元画像



低周波数カット



エッジを強調



高周波数カット



円滑化

軸から遠い=高次回折波=高周波数

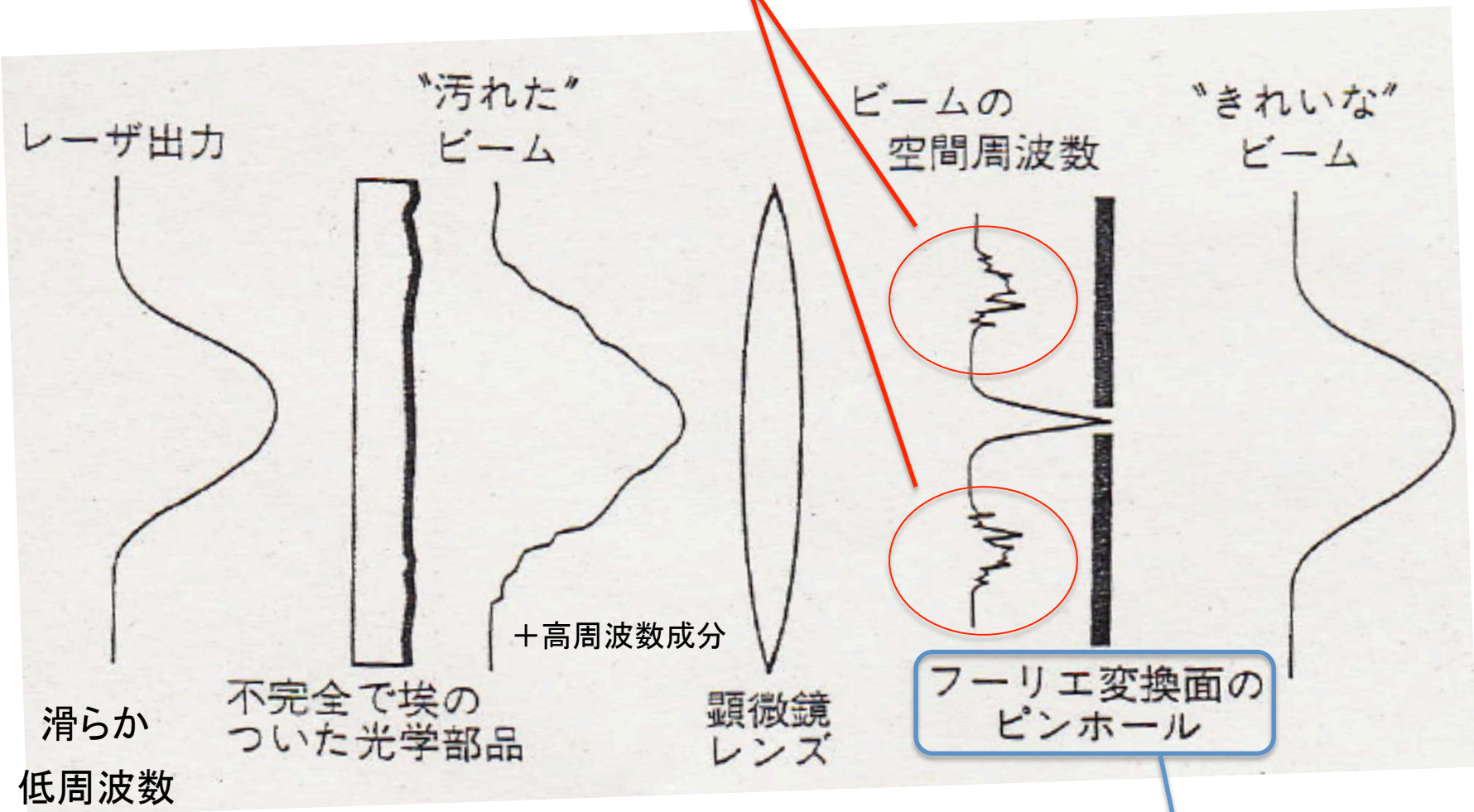
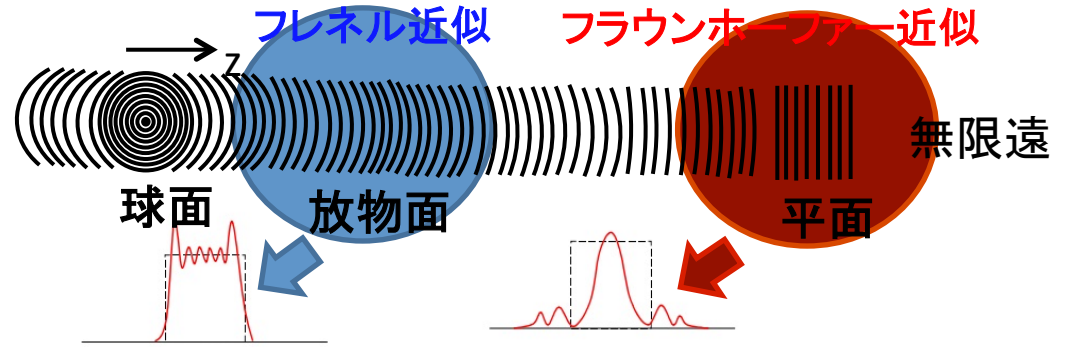
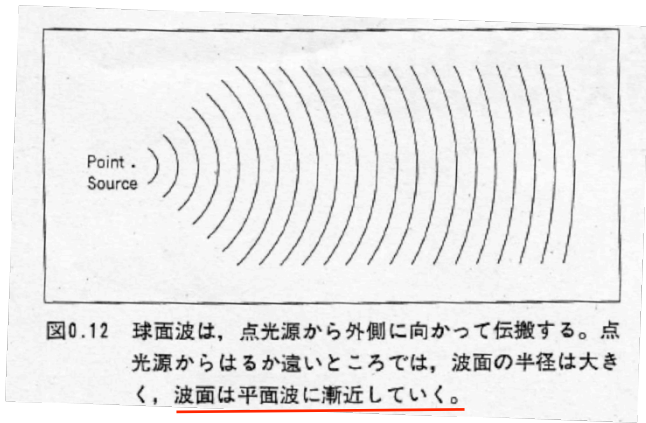


図0.44 空間フィルタリング

高周波数カット





## 円形開口のフラウンホーファー回折

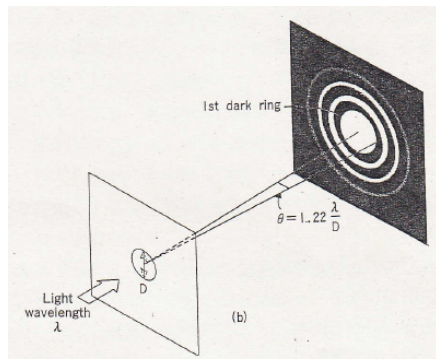
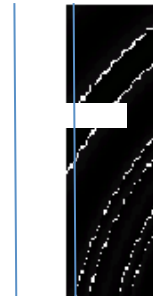


図0.15 開口による光の回折  
(b)円形開口

干渉縞パターン



強度分布

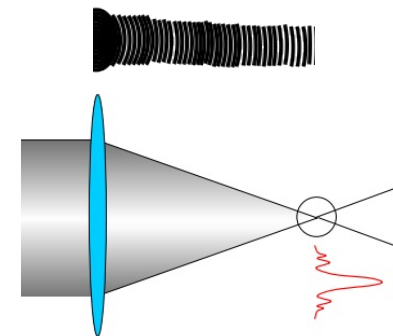
## レンズでの結像

半径aの開口 ≡ 半径aのレンズ



無限遠での回折パターン

↓  
焦点位置での回折パターン



×点  
○有限の広がり