大学院入学試験対策模試　　　　　　　　　　　　名前　解答例

数学　その１

第１問

(1) 行列$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $C^{-1}AC$が対角行列となるような正則行列Cを求めよ．

(3) A^{2n}(nは整数)を求めよ．

[第１問の解答箇所（裏面利用可）]

(1) $|\lambda E - A| = \lambda^2 - 1$より，固有値$\lambda = \pm 1$

固有値それぞれについて，固有ベクトルを求める（計算過程略）

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) $C = (\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{q})$とおくと，det$C = -1$より C は正則で，

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $(C^{-1}AC)^{2n} = C^{-1}A^{2n}C = \begin{pmatrix} 1^{2n} & 0 \\ 0 & (-1)^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{2n} = CC^{-1}A^{2n}CC^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

採点	

数学　その 2

第 2 問　球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ の $x,y,z\geq 0$の部分をΩとし, ∂Ω(Ωの境界)の球面部分をΓとする。 ベクトル場 $\boldsymbol{f}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ について， $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}d\boldsymbol{S}$を以下に指定する二通りの方法により求めよ。 但し，単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$ は Ω の外へ向くものとする。

(1) 面積分を直接計算せよ

(2) ガウスの発散定理を用いて計算せよ.

[第 2 問の解答箇所（裏面利用可）]

(1) Γ上で$\boldsymbol{n}={}^t(x,y,z)$より,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_\Gamma(xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k})\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})dS$$
$$=\int_\Gamma(x^2+y^2+xy)zdS$$

球面上を極座標変換で表すと， $x=\sin\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\sin\varphi, z=\cos\theta$より,

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+xy)zdS$$

$$=\iint_{0\leq\theta\leq\pi/2,0\leq\varphi\leq\pi/2}\{(\sin\theta\cos\varphi)^2+(\sin\theta\sin\varphi)^2+(\sin\theta\cos\varphi)(\sin\theta\sin\varphi)\}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\iint_{0\leq\theta\leq\pi/2,0\leq\varphi\leq\pi/2}\{\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\iint_{0\leq\theta\leq\pi/2,0\leq\varphi\leq\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta(1+\cos\varphi\sin\varphi)d\theta d\varphi$$

$$=\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}(1+\sin\varphi\cos\varphi)\, d\varphi\right)$$

$$=\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi+1}{2}=\frac{\pi+1}{8}$$

(2)　ガウスの発散定理より,

$$\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{f}dV=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dV$$

$\partial\Omega=\Gamma\cup\Gamma_x\cup\Gamma_y\cup\Gamma_z$において，$\Gamma_x$，$\Gamma_y$上では$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$であるから

$$\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{f}dV=\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS+\int_{\Gamma_z}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{f}dV-\int_{\Gamma_z}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

採点	

右辺第一項について,

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{f}dV = \int_{\Omega} 2\mathrm{z}dV = 2\iiint_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le\varphi\le\pi/2} r\cos\theta r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$= 2\left(\int_0^1 r^3dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\varphi\right)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

右辺第二項は,

$$\int_{\Gamma_z} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{\Gamma_z} xy(-1)dS = -\iint_{x^2+y^2\le 1, x,y\ge 0} xydxdy$$

$$= -\int_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2} r\cos\theta r\sin\theta rdrd\theta$$

$$= -\left(\int_0^1 r^3dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

以上より

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\pi+1}{8}$$

数学　その 3

第 3 問　次の定積分の値を複素積分により求めよ.

(1) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ ($0<a<1$)

(2) $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ ($0<a<1$)

[第 3 問の解答箇所（裏面利用可）]

(1) $z=\cos\theta+i\sin\theta$とおいて代入すると,

$$I=\int_{|z|=1}\frac{-\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{4ai}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z-\frac{1}{a}\right)(z-a)}dz$$

$0<a<1$ より，$|z|=1$の内部にある特異点は z=0(2 位の極)と z=a(1 位の極)

$$\mathrm{Res}(f:0)=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z-\frac{1}{a}\right)(z-a)}\right]'=a+\frac{1}{a}$$

$$\mathrm{Res}(f:a)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(z-\frac{1}{a}\right)(z-a)}\right]=a-\frac{1}{a}$$

$$I=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{4ai}\left(a-\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a}\right)=\pi$$

(2) $\cos\theta=$の周期性を用い，さらに$z=\cos\theta+i\sin\theta$とおいて代入すると,

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2}\frac{d\theta}{iz}=-\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{d\theta}{(az-1)(z-a)}$$

$0<a<1$ より，$|z|=1$にある被積分関数の特異点は z=a(1 位の極)

$$\mathrm{Res}(f:a)=\frac{1}{a^2-1}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{-1}{2i}\times 2\pi i\times\frac{1}{a^2-1}=\frac{\pi}{1-a^2}$$

採点	

数学　その4

第4問

(1) 次の微分方程式を解け

$$xy' - y = x^2 + 1$$

(2) 定数係数線形方程式の特殊解を求めよ

$$y'' - 2y = e^{2x} + \sin x$$

[第4問の解答箇所（裏面利用可）]

(1)　1階線形微分方程式の標準系 $y' + P(x)y = Q(x)$ に直す

$$y' - \frac{1}{x}y = x + \frac{1}{x}$$

同次方程式 $y' + P(x)y = 0$ を解く

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \text{ とすると，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y$$

これは変数分離形なので，両辺積分すると，

$$y = Cx(\mathrm{C}: \text{積分定数})$$

今求めた解の積分乗数をxの関数$C(x)$とし，元々の微分方程式に代入する．(定数変化法)

$$x\left(C'(x)x + C(x)\right) - C(x)x = x^2 + 1$$

$$C(x) = x - x^{-1} + \mathrm{C}$$

$y = C(x)x$に$C(x) = x - x^{-1} + \mathrm{C}$を代入すると，

$$y = x - x^{-1} + \mathrm{C}$$

(2)特殊解の求め方は色々とあるので，一例を示す．講義ベースの求め方が簡単

$y'' - 2y = 0$の基本解を求める．特性方程式をつくると，

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm\sqrt{2}$$

ゆえに基本解は,

$$y_1 = e^{\sqrt{2}x}, \quad y_2 = e^{-\sqrt{2}x}$$

特殊解を求める．y_1，y_2のロンスキー行列式Wは

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{2}x} & e^{-\sqrt{2}x} \\ \left(e^{\sqrt{2}x}\right)' & \left(e^{-\sqrt{2}x}\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{2}x} & e^{-\sqrt{2}x} \\ \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} & -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} \end{vmatrix} = 2$$

$Q(x)$=$e^{2x} + \sin x$とおくと，特殊解$v(x)$は,

$$v(x) = -y_1 \int \frac{y_2 Q(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 Q(x)}{W} dx$$

計算すると,

$$v(x) = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{3}\sin x$$

採点	